Analiza Matematyczna I.2, kolokwium 2
29 maja 2014, 16:15 — 19:15

Rozwiązania różnych zadań należy napisać na różnych kartkach, bo sprawdzą je różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.
Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych (kalkulatorów, telefonów komórkowych itp.); posiadane muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

0. Promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest równy 2. Definiujemy funkcję f wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{2x}{x+1}\right)^n$ dla każdego x, dla którego szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{2x}{x+1}\right)^n$ jest zbieżny. Czy wynika stąd, że

a. f jest jednostajnie ciągła na przedziale $(-\frac{1}{2}, 0]$?
b. f jest jednostajnie ciągła na przedziale $(0, \infty)$?
c. f'' jest ciągła na przedziale $(0, 2)$?
d. f' jest ograniczona na przedziale $(-\frac{1}{2}, 1]$?
e. istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$?

---

1. Funkcja f jest trzykrotnie różniczkowalna w otoczeniu zera i spełnia warunki: $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 6$, . Niech $h(x) = f(f(x))$. Dowieść, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $0 < |x| < \delta$, to $|h(x)| < |x|$.

---

2. Znaleźć granicę $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+\cos x - 2\cos(x^4)\right)\sqrt{1+\sin(\operatorname{tg} x)}}{2^{\sin(3x)-\operatorname{tg} x}\cdot\left(\operatorname{tg} x - \sin x + \frac{1}{2}\ln(1-x^3)\right)}$.

---

3. Wykazać, że wzór $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x - n\sin\frac{x}{n}\right)$ określa funkcję $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i że jest to funkcja różniczkowalna. Czy jest różniczkowalna dwukrotnie?

---

4. Rozwiązać równanie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

---

5. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

---

6. Zbadać, czy ciąg funkcji $f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1+\mathrm{e}^{nx})$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$.
